Mateusz Hohol

Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych UJ
ORCID: 0000-0003-0422-5488
mateusz.hohol@uj.edu.pl

MATEMATYKA W METAFORACH? O WYJAŚNIANIU POJĘĆ MATEMATYCZNYCH ZA POMOCĄ METAFOR KOGNITYWNYCH[1]

DOI: 10.52097/acapress.9788362475810.49-72

Słowa kluczowe: metafora poznawcza, poznanie matematyczne, pojęcia abstrakcyjne, problem ugruntowania symboli, ucieleśnione poznanie

Streszczenie

Wielu przedstawicieli nauk o poznaniu zgadza się dziś co do tego, że nasze ciała umożliwiają, a zarazem ograniczają procesy poznawcze. Ponieważ pojęcia abstrakcyjne, w tym matematyczne, wykraczają poza nasze bezpośrednie doświadczenie percepcyjno-motoryczne, stanowią one poważne wyzwanie dla idei ucieleśnionego umysłu. Teoria metafor kognitywnych oferuje rozwiązanie tego problemu. Zakłada ona, że pojęcia abstrakcyjne, w tym matematyczne, opierają się na pojęciach konkretnych, które są z kolei w pełni ugruntowane w percepcji i działaniu. W niniejszym rozdziale przedstawiam zarówno główne założenia i osiągnięcia teorii metafor w odniesieniu do pojęć matematycznych, jak i różne linie krytyki. Wskazuję jednak, że krytyka teorii metafor jako wyjaśnienia dla poznawczego przetwarzania

[1] W niniejszym rozdziale przedstawiam w syntetycznej formie, a także rozwijam, niektóre idee opisane przeze mnie wcześniej w książkach *Umysł matematyczny* (Brożek, Hohol, 2014) oraz *Foundations of Geometric Cognition* (Hohol, 2020). Dziękuję szczególnie prof. Jerzemu Pogonowskiemu (UAM) i prof. Rafaelowi Núñezowi (UCSD), dzięki którym mogłem przemyśleć różne aspekty teorii metafor i ucieleśnienia matematyki.

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72). Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

pojęć abstrakcyjnych nie oznacza, że pojęcia matematyczne są zupełnie odcieleśnione. Jako alternatywę dla teorii metafor przedstawiam słabsze ujęcie ucieleśnienia pojęć, w tym matematycznych, które opiera się na ideach podwójnego kodowania reprezentacji poznawczych oraz języka-jako-rusztowania dla myślenia abstrakcyjnego.

Keywords:

cognitive metaphor, mathematical cognition, abstract concepts, symbol grounding problem, embodied cognition

Abstract

Today, many cognitive scientists agree that our bodies both constrain and enable cognitive processes. Abstract concepts, including mathematical ones, reach beyond our proximal sensorimotor experience and, in consequence, constitute a severe challenge for the embodiment. The theory of cognitive metaphors offers a solution. It states that abstract concepts, also mathematical, build upon concrete concepts fully grounded directly in perception and action. In the present chapter, I outline the main assumptions and achievements of this approach, mainly applied to mathematical concepts. Then, I show some lines of criticism. However, I claim that the critique of cognitive metaphors as the explanation of cognitive processing of abstract concepts does not automatically mean that mathematical concepts are entirely disembodied. As an alternative, I present a weaker approach to the embodiment of concepts, also mathematical, build upon the ideas of dual coding of cognitive representations and language-as-scaffolding for abstract thinking.

Od pojęć amodalnych do ucieleśnionego poznania

Nasza wiedza deklaratywna jest często modelowana jako sieć relacji między pojęciami – zarówno konkretnymi, takimi jak „drzewo", „kot" czy „samochód", jak i abstrakcyjnymi. Do tych drugich zaliczają się pojęcia matematyczne, takie jak „liczba pierwsza", „całka Riemanna", i naukowe, np. „gen", „kwark". Pomimo tego, że desygnaty pojęć z pierwszej grupy są dla nas łatwiejsze

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72). Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

do wyobrażenia (Paivio, 1986), pionierzy klasycznej kognitywistyki sądzili, że pojęcia konkretne i abstrakcyjne są co do zasady przechowywane w pamięci długotrwałej i przetwarzane w pamięci roboczej w analogiczny sposób (Fodor, 1992). Mówiąc bardziej precyzyjnie, wszystkie pojęcia są *quasi*-językowymi reprezentacjami umysłowymi, które cechują się arbitralnością i amodalnością (zob. Bechtel, Abrahamsen, Graham, 1998). Mają one charakter *quasi*-językowy, ponieważ kodowanie pojęć jako list cech obiektów nie zachodzi w żadnym z języków naturalnych, ale w uniwersalnym dla wszystkich ludzi *języku myśleńskim* (Fodor, 1975). Relacja między pojęciem a tym, do czego się ono odnosi, nie jest oparta na podobieństwie strukturalnym, lecz jest całkowicie arbitralna. Wreszcie, pojęcia są amodalne, to znaczy niezależne od percepcji oraz działania, w tym sensie, że informacje docierające ze zmysłów są przekodowywane na symbole języka myśleńskiego. W ujęciu klasycznej kognitywistyki wyższe procesy poznawcze polegają na przebiegających poza świadomością obliczeniach na symbolach, a obliczenia te opierają się jedynie na własnościach syntaktycznych symboli i dokonywane są w obszarach mózgu innych niż te zaangażowane bezpośrednio w percepcję i działanie. Przedstawione wyżej, charakterystyczne dla wczesnej kognitywistyki, podejście do pojęć określane jest skrótowo jako amodalne[2].

Amodalne podejście do pojęć uwikłane jest jednak w wiele problemów. Należy do nich tzw. problem ugruntowania symboli opisany przez Harnada (1990). W oryginalnym sformułowaniu brzmi on następująco: „Jak znaczenia [pierwotnie] pozbawionych znaczenia symboli, które podlegają manipulacjom jedynie na podstawie ich (arbitralnych) kształtów mogą być ugruntowane w czymkolwiek

[2] Czytelnik może się zastanawiać, jak do amodalnego podejścia do pojęć ma się koncepcja reprezentacji obrazowych Kosslyna (1980). Przynajmniej jeśli chodzi o jej wczesną wersję, zasoby informacyjne, konieczne do wytwarzania wyobrażeń (w oryginalnej terminologii „reprezentacje powierzchniowe"), przechowywane są w pamięci długotrwałej jako reprezentacje amodalne (w oryginalnej terminologii „reprezentacje głębokie"), co sprawia, że cała koncepcja nie jest aż tak daleka od ujęć amodalnych, jak mogłoby się wydawać. Sam Fodor (1975, s. 184) nie wykluczał również istnienia obrazów umysłowych, jednak uważał, że pełnią one rolę w poznaniu tylko wtedy, gdy powiązane są z symbolami „języka myśli".

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych
za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72).
Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

innym niż w innych pozbawionych znaczenia symbolach?" (s. 335). Zdaniem Harnada, aby system poznawczy mógł działać w świecie, przynajmniej niektóre symbole umysłowe muszą być ugruntowane w czymś innym niż w innych (pozbawionych znaczenia) symbolach. Podejście takie zostało zrealizowane na gruncie koncepcji ucieleśnienia umysłu (bądź ucieleśnionego poznania; Anderson, 2003; Vogt, 2002). Choć poszczególni teoretycy różnią się między sobą, większość z nich zgadza się z tezą, że poznanie jest ograniczane, a zarazem gruntowane, przez nasze ciała, które są fizyczne, wchodzą w interakcje z innymi fizycznymi ciałami, działając w środowisku fizycznym.

Teoretycy ucieleśnionego poznania unikają problemu opisanego przez Harnada, twierdząc, że struktury wiedzy ugruntowane są bezpośrednio w naszym doświadczeniu jako tzw. symbole percepcyjno-motoryczne (Barsalou, 1999, 2020). Oznacza to, że:

> wyższe procesy poznawcze są modalne, tzn. opierają się na częściowych reaktywacjach stanów sensoryczno-motorycznych. (…) Ludzka wiedza wymaga, w pewnym sensie, *ponownego doświadczenia* danego zdarzenia za pomocą procesów zmysłowych, które uczestniczyły w pierwotnej percepcji bodźca (Winkielman, Niedenthal, 2009, s. 84).

Wbrew tezom klasycznej amodalnej kognitywistyki struktury sensoryczno-motoryczne mózgu są więc bezpośrednio zaangażowane w przetwarzanie pojęć, zarówno jako nośnik, jak i źródło znaczenia. Jeśli chodzi o przetwarzanie pojęć konkretnych, założenia ucieleśnionego poznania zostały dobrze potwierdzone w eksperymentach behawioralnych i badaniach neuroobrazowych (Barsalou, 2008). Z drugiej strony pojęcia abstrakcyjne wykraczają poza nasze bezpośrednie doświadczenie. Dotyczy to szczególnie pojęć matematycznych („liczba pierwsza", „całka Riemanna"), których precyzja mocno kontrastuje z wieloznacznością i rozmytością, charakterystyczną dla pojęć konkretnych („ptak", „zamek"). Stąd też, jak zauważa Dove (2016), „istnieje ogólna zgoda, że w pełni abstrakcyjne pojęcia stanowią szczególne wyzwanie dla ucieleśnionego poznania" (s. 1115). Ponieważ pojęcia abstrakcyjne są wszechobecne w matematyce, stanowi ona doskonałe pole do doprecyzowywania i dyskutowania założeń ucieleśnienia (Fischer, 2012).

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych
za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72).
Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

W kolejnej części tekstu przyjrzymy się teorii metafor kognitywnych, będącej jedną z najszerzej znanych prób wyjaśnienia genezy pojęć abstrakcyjnych, w tym matematycznych, w oparciu o ideę ucieleśnienia umysłu.

Matematyka ucieleśniona poprzez metafory kognitywne

Jednym z najbardziej wpływowych podejść do przetwarzania pojęć abstrakcyjnych, jakie zaproponowano w ramach ucieleśnionego poznania, jest koncepcja metafor przedstawiona przez Lakoffa i Johnsona w książce *Metafory w naszym życiu* (1980/2010). Jednocześnie koncepcja ta przyczyniła się do popularyzacji w naukach o poznaniu, a w szczególności w lingwistyce kognitywnej, idei ucieleśnienia. W największym skrócie Lakoff i Johnson (1980/2010) wskazują, że pojęcia abstrakcyjne są istotną częścią naszego codziennego życia, i podobnie jak pojęcia konkretne powiązane są one z aktywnością cielesną. O ile pojęcia konkretne wywodzą się bezpośrednio z doświadczeń sensoryczno-motorycznych akumulowanych w tzw. schematach wyobrażeniowych (Gibbs, Colston, 1995; Johnson, 2007/2015), pojęcia abstrakcyjne powstają dzięki przeniesieniu struktury znaczeniowej pojęć konkretnych na nowe dziedziny poznania (są to tzw. metafory gruntujące). Możliwa jest również sytuacja, gdy struktura znaczeniowa zrozumiałego już pojęcia abstrakcyjnego wykorzystywana jest do konceptualizacji nowej abstrakcyjnej dziedziny (tzw. metafory łącznikowe). W takim ujęciu wszechobecne w naszym języku wyrażenia metaforyczne stanowią odbicie nieświadomych procesów poznawczych. Wyrażenia metaforyczne, takie jak „Ona obaliła mój argument", „Marnujesz mój czas" czy „Miłość jest wspólną podróżą przez życie" są dla nas zrozumiałe, ponieważ pojęcia abstrakcyjne – „argument", „czas" i „miłość" – nadbudowane są na pojęciach odnoszących się do konkretnych doświadczeń konfliktu fizycznego, drogocennego przedmiotu i podróży.

Prócz pojęć abstrakcyjnych, które odgrywają ważną rolę w naszym codziennym życiu i znajdują swoje odbicie w języ-

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72). Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

ku potocznym, teoria metafor została dotychczas zastosowana do wyjaśnienia genezy pojęć filozoficznych (Lakoff, Johnson, 1999), religijnych (Slingerland, 2004) czy prawnych (Brożek, 2020; Jakubiec, 2017), a także w analizie znaczenia dzieł sztuki (Hetmański, 2020; Johnson, 2007/2015) i procesów komunikacyjnych (Hetmański, 2015). Co więcej, zainspirowany ideą Mac Lane'a (1986), zgodnie z którą pojęcia matematyczne wywodzą się od pojęć potocznych, Lakoff (1987/2011) zaproponował, że teoriomnogościowe pojęcie „zbiór "wywodzi się z codziennego pojęcia „pojemnik". Dekadę później Lakoff powrócił do poznania matematycznego wraz z Núñezem. Opisali oni metaforyczne ugruntowanie liczb (Liczby To Punkty na Prostej), arytmetyki (Arytmetyka to Ruch Wzdłuż Ścieżki), zbiorów (Zbiory Są Przedmiotami) czy funkcji (Dziedzina Funkcji Jest Zestawem Przyjmowanych Obiektów Wejściowych) (Lakoff, Núñez, 1997; Núñez, Lakoff, 1998). Wreszcie, Lakoff i Núñez opublikowali książkę *Where Mathematics Comes From* (2000; dalej: WMCF), której przesłanie streszcza się najlepiej w następującym fragmencie: „szczegółowa natura naszych ciał, naszych mózgów i naszego codziennego funkcjonowania w świecie kształtują ludzkie pojęcia i rozumowania, w tym pojęcia i rozumowania matematyczne" (s. 5).

Jak wskazują Lakoff i Núñez, matematyka jest abstrakcyjnym i precyzyjnym systemem pojęciowym, którego pewna część jest ugruntowana w doświadczeniach sensoryczno-motorycznych (poprzez metafory gruntujące), zaś reszta wykorzystuje dobrze znane już pojęcia abstrakcyjne do konceptualizacji kolejnych (poprzez metafory łącznikowe). Stan ten oddaje definicja, zgodnie z którą metafora jest:

> ugruntowanym i zachowującym inferencje odwzorowaniem między dziedzinami – jest to mechanizm neuronalny, który umożliwia nam wykorzystanie struktury inferencyjnej jednej dziedziny pojęciowej (np. geometrii) do myślenia o innej (np. arytmetyce). Metafory pojęciowe umożliwiają nam stosowanie tego, co już wiemy na temat jednego działu matematyki w rozumowaniach na temat innego działu (s. 6).

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych
za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72).
Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

Choć idee Lakoffa i Núñeza zdają się odnosić do poznania matematycznego na poziomie indywidualnym, historia matematyki zna wiele przypadków, gdzie jeden dział matematyki konceptualizowany był w oparciu o inny. Przykładowo, w księgach 7–9 *Elementów* Euklidesa teoria liczb zbudowana jest w terminach geometrycznych (liczby naturalne pojmowane są jako odcinki, zaś mnożenie jako odmierzanie). Z drugiej strony nowożytna idea układu współrzędnych odwraca odwzorowanie dziedzin metafory – obiekty geometryczne pojmowane są jako wartości numeryczne.

W WMCF Lakoff i Núñez dopracowali idee przedstawione w poprzednich pracach, a także zaprezentowali nowe, w tym bardzo śmiałe. Dużo miejsca poświęcili arytmetyce, która poznawczo wywodzi się (przynajmniej ich zdaniem) z czterech metafor gruntujących – Arytmetyka to Zbiór Przedmiotów, Arytmetyka to Konstrukcja Przedmiotu, Arytmetyka to Pomiar za Pomocą Pręta oraz wspomnianej już metafory Arytmetyka to Ruch Wzdłuż Ścieżki. Zgodnie z tą ostatnią ruch wzdłuż ścieżki pozwala zrozumieć, czym jest działanie arytmetyczne, punkt na ścieżce – wynik działania arytmetycznego, początek drogi – zero, kolejne punkty na ścieżce – kolejne liczby, jednostkowe położenie (inne niż początek) – liczba 1, dalej od początku – większy niż, bliżej początku – mniejszy niż, przemieszczenie z miejsca A na taką samą odległość, jak od początku do punktu B – dodawanie B do A, zaś przemieszczenie się w kierunku początku z miejsca A na taką odległość, jak odległość od początku do B – odejmowanie B od A. Inne działy matematyki, których metaforyczne ugruntowanie przedstawili Lakoff i Núñez, to: teoria mnogości, algebra (w tym także Boole'a), rachunek całkowy i różniczkowy. Wiele miejsca poświęcili oni poznawczej genezie pojęcia nieskończoności, a także równaniu Eulera $e^{\pi i} + 1 = 0$ (gdzie e jest podstawą logarytmu naturalnego, π – stosunkiem obwodu koła do długości jego średnicy, zaś i jednostką urojoną, która z definicji spełnia równość $i^2 = -1$), które w potocznym obiegu uznawane jest za najpiękniejszą formułę matematyczną wszechczasów[3]. Jeśli chodzi

[3] Co ciekawe, badanie neuroobrazowe Zekiego i współpracowników (Zeki, Romaya, Benincasa, Atiyah, 2014) wykazało, że dla przebadanych profesjonalnych

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72). Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

natomiast o nieskończoność, to Lakoff i Núñez (2000) twierdzą, że u jej podłoża leży struktura aspektowa naszego systemu pojęciowego, w którym czynności i stany konceptualizowane są jako dokonane lub niedokonane:

> Idea nieskończoności aktualnej w matematyce jest metaforyczna w tym sensie, że różne przypadki nieskończoności aktualnej wykorzystują metaforyczne pojęcie ostatecznego *wyniku* procesu, który nie ma końca. Dosłownie nie może być czegoś takiego, jak wynik niekończącego się procesu: jeśli proces nie ma końca, nie może mieć „ostatecznego wyniku". Mechanizm metaforyzacji dopuszcza jednak konceptualizację 'wyniku' niekończącego się procesu (...) w kategoriach procesów, które mają koniec (...). Wszystkie przypadki nieskończoności aktualnej (...) są przypadkami szczególnymi ogólnej metafory pojęciowej, w której procesy ciągnące się w nieskończoność konceptualizowane są jako mające kres i ostateczny wynik (s. 158).

Prócz części teoretycznej, czyli opisów kolejnych metafor gruntujących i łączących pojęcia matematyczne i całe działy matematyki, WMCF zawiera również rozbudowaną część metateoretyczną, którą określić można jako próbę zarysu filozofii ucieleśnionej matematyki. Po pierwsze, Lakoff i Núñez przeciwstawiają się zbiorowi poglądów, który sami określają mianem „matematycznego romansu", będącego mieszaniną tez charakterystycznych dla współczesnego platonizmu matematycznego (np. Heller, 2006) oraz inspirowanych nimi obiegowych opinii na temat „królowej nauk". Oto niektóre z nich: „matematyka jest obiektywną cechą Wszechświata; obiekty matematyczne są realne, a prawda matematyczna jest uniwersalna, absolutna i pewna (...). Matematyka byłaby taka sama, nawet gdyby na świecie nie było człowieka (...). Język matematyki jest językiem natury (...). Naturę matematyki można scharakteryzować tylko za pomocą samej matematyki" (Lakoff, Núñez, 2000, s. 339–340). Zamiast tego autorzy WMCF

matematyków rzeczywiście jest to najpiękniejsze z równań, co na poziomie mózgu znajduje odzwierciedlenie w zwiększonej aktywności przyśrodkowej kory oczodołowo-czołowej, uznawanej za jeden z neuronalnych korelatów percepcji piękna.

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych
za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72).
Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

twierdzą, że matematyka jest wytworem człowieka powstałym w sensoryczno-motorycznych interakcjach ze światem, co oznacza, że bez człowieka nie byłoby również matematyki. Ich zdaniem jedyna droga ku matematyce:

> [wiedzie] poprzez pojęcia w naszych umysłach, które kształtowane są przez nasze ciała i mózgi i realizowane fizykalnie w naszych układach nerwowych. Dla człowieka – oraz wszystkich innych ucieleśnionych istot – matematyka jest matematyką ucieleśnioną. Jedyna matematyka, którą możemy znać, to ta, o której wiedzę dopuszczają nasze ciała i mózgi (…). Teoria jedynej matematyki, którą znamy lub którą możemy znać, jest [jednocześnie] teorią tego, czym matematyka jest – czym jest naprawdę (s. 346).

Idąc dalej, według Lakoffa i Núñeza prawda matematyczna nie różni się znacząco od innych prawd, które ugruntowane są w ucieleśnionej semantyce (zob. również: Lakoff, Johnson, 1980/2010, rozdz. 24). Matematyka staje się językiem wszechświata tylko dzięki wysiłkom ludzkim, tj. gdy naukowcom udaje się wykorzystać struktury matematyczne do precyzyjnego modelowania zjawisk fizycznych. Wreszcie naturę matematyki można badać za pomocą narzędzi, których dostarczają nauki o poznaniu, takie jak lingwistyka, psychologia czy neuronauka. Z drugiej strony, Lakoff i Núñez podkreślają, że stała struktura naszych ciał i powtarzalność sensoryczno-motorycznych interakcji ze światem, będących podstawą struktur naszej wiedzy, prowadzą do uniwersalności matematyki. Badacze ci sprzeciwiają się zatem radykalnemu konstruktywizmowi społecznemu, który postrzega matematykę jako system arbitralnych konwencji, obwiązujący jedynie w określonych kontekstach kulturowych (np. Burton, 1995). Twierdzą oni, że matematyka ucieleśniona poprzez metafory nie współgra także z innymi pozycjami filozoficznymi – w szczególności formalizmem, ponieważ skupia się on na gotowych „produktach", zaniedbując czynnik ludzki, oraz intuicjonizmem – ponieważ analizy przedstawione w WMCF dotyczą matematyki klasycznej.

Powyżej zarysowałem genezę abstrakcyjnych pojęć matematycznych według teorii metafor kognitywnych. Wskazałem

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych
za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72).
Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

również konsekwencje metateoretyczne, jakie wyciągają z niej sami autorzy WMCF. Dalej omówię kolejno ugruntowanie idei Lakoffa i Núñeza w badaniach empirycznych, zarzuty pojęciowe, historyczne i filozoficzne wobec treści zawartych w WMCF, by w końcu przyjrzeć się krytycznie teorii metafor kognitywnych w ogóle, rozważając jednocześnie alternatywne podejście do genezy pojęć abstrakcyjnych.

Problemy z teorią metafor w odniesieniu do matematyki

Teoria metafor kognitywnych została sformułowana przez Lakoffa i Johnsona (1980/2010) w ramach teoretycznego działu lingwistyki kognitywnej, który opiera się na dość swobodnej analizie praktyk językowych. Podstawowym założeniem jest w niej istnienie związku między strukturą języka a strukturą procesów poznawczych. Innymi słowy, język postrzegany jest jako zwierciadło, w którym można obserwować, jak działa umysł. Założenie to jest zawodne (np. Murphy, 1997). Z czasem jednak teoria metafor zyskała pewne wsparcie w wynikach eksperymentów psychologicznych, wskazujących, że niektóre z codziennych metafor, np. te dotyczące czasu, funkcjonują nie tylko na poziomie języka, ale również nieświadomego przetwarzania poznawczego (np. Boroditsky, 2001). Podobna sekwencja zdarzeń miała miejsce w przypadku aplikacji teorii metafor do matematyki. WMCF jest opracowaniem czysto teoretycznym (nie licząc początkowych partii, gdzie autorzy zreferowali badania nad tzw. zmysłem liczby). Marghetis, Núñez i Bergen (2014) przeprowadzili badanie, w którym testowano metaforę Arytmetyka to Ruch Wzdłuż Ścieżki. Jak pamiętamy, metafora ta zakłada, że dodawanie pojmowane jest jako oddalanie się, zaś odejmowanie jako zbliżanie do początku ścieżki. Zadaniem osób badanych było wykonywanie prostych zadań arytmetycznych i udzielanie odpowiedzi za pomocą myszki komputerowej. Badacze zaobserwowali, że w trakcie dodawania w myślach ruchy ręki systematycznie odchylały się w prawą stronę, zaś podczas odejmowania – w lewą, co zinterpretować można jako

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72). Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

przejaw ugruntowania arytmetyki w reprezentacjach przestrzennych. W innym badaniu Marghetis i Núñez (2013) przenalizowali gesty towarzyszące dowodom matematycznym przeprowadzanym przez studentów w formie ustnej. Badanie to wykazało, że typowe dynamiczne wyrażenia językowe dotyczące funkcji matematycznej (wzrasta, oscyluje, zbliża się do granicy) nie są jedynie kwestią konwencji, ale odzwierciedlają dynamiczną naturę pojęć na poziomie nieświadomego przetwarzania poznawczego.

Choć zgodnie z moją wiedzą nie ma zbyt wielu innych eksperymentów testujących, czy opisane w WMCF odwzorowania metaforyczne funkcjonują rzeczywiście na poziomie poznawczym, wiele badań nad asocjacjami przestrzenno-numerycznymi (*spatial numerical associations*) dostarczyło wyników idących po linii teorii metafor. Metafora Arytmetyka to Ruch Wzdłuż Ścieżki bliska jest metaforze Liczby to Punkty na Prostej, a ta z kolei koncepcji mentalnej osi liczbowej, która od pół wieku pozostaje przedmiotem intensywnych studiów prowadzonych w ramach psychologii matematyki (Restle, 1970). Jednym z głównych argumentów za istnieniem mentalnej osi liczbowej jest efekt SNARC (*Spatial Numerical Association of Response Codes*, zależność przestrzenna między liczbą a rodzajem odpowiedzi). Polega on na tym, że w zadaniu wymagającym udzielania szybkich odpowiedzi na temat własności prezentowanych kolejno liczb (np. ich parzystości), osoby badane przejawiają szybsze czasy reakcji w przypadku małych liczb lewą ręką, zaś w przypadku dużych liczb – prawą (Dehaene, Bossini, Giraux, 1993). Efekt ten zaobserwowano dotąd wielokrotnie, w różnych zadaniach i w różnych grupach. Zaobserwowano również, że dzieci o lepszych zdolnościach matematycznych przejawiają silniejszy efekt SNARC, co oznacza, że umysłowa reprezentacja przestrzeni może stanowić dobre „rusztowanie" dla rozwoju kompetencji matematycznych (zob. Cipora, He, Nuerk, 2020).

Z drugiej strony nasze badanie pokazało, że profesjonalni matematycy, w przeciwieństwie do doktorantów kierunków technicznych i społecznych, nie przejawiają efektu SNARC w zadaniu oceny parzystości liczb (Cipora, Hohol, Nuerk, Willmes, Brożek, Kucharzyk, Nęcka, 2016). Oznacza to, że w przypadku

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych
za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72).
Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

matematycznych ekspertów reprezentacje liczb mogą być bardziej abstrakcyjne. Wynik ten został również zinterpretowany wprost jako sprzeczny z teorią metafor (Winter, Yoshimi, 2020). Z drugiej jednak strony, w nowszym badaniu, w którym wykorzystaliśmy nie zadanie oceny parzystości liczb, ale zadanie klasyfikacji wielkości (osoby badane mają odpowiadać za pomocą przypisanych przycisków, czy kolejno prezentowane liczby są większe czy mniejsze niż 5), zaobserwowaliśmy efekt SNARC u profesjonalnych matematyków (Hohol, Willmes, Nęcka, Brożek, Nuerk, Cipora, 2020). W typowych warunkach zadanie oceny parzystości liczb aktywuje reprezentację wielkości liczb automatycznie, podczas gdy w zadaniu klasyfikacyjnym aktywacja ta jest intencjonalna, tj. wymuszona zadaniem. Asocjacje przestrzenno-numeryczne są więc zależne od kontekstu. Podsumowując, należy stwierdzić, że kategorie przestrzenne – choćby w przypadku profesjonalnych matematyków – nie są zawsze konieczne do tego, by dobrze rozumieć, czym są liczby, i efektywnie je przetwarzać.

Istnieją badania, które jednoznacznie świadczą o ucieleśnieniu matematyki, ale trudno odnieść je do samej teorii Lakoffa i Núñeza. Przykładem są choćby badania nad liczeniem na palcach u dzieci (zob. Szczygieł, Cipora, Hohol, 2015) i u osób dorosłych (zob. Cipora, Szczygieł, Hohol, 2014; Hohol, Wołoszyn, Nuerk, Cipora, 2018), które wskazują, że reprezentacje liczb ugruntowane są w obszarach mózgu odpowiadających za kontrolę motoryczną.

Po ponad 20 latach od ukazania się WMCF powiedzieć trzeba, że pomimo zachęt ze strony autorów i polemistów (np. Goldin, 2001; Schiralli, Sinclair, 2003), tezy zawarte w tej książce nie przekształciły się w program badań empirycznych. Choć cytowana była ona dotąd ponad 4500 razy, także w empirycznych pracach z zakresu poznania matematycznego, rzadko kiedy chodziło o budowanie hipotez badawczych na podstawie opisu matematycznych metafor kognitywnych. Wspomniane wyżej badania dotyczą jedynie nielicznych metafor, podczas gdy status reszty pozostaje w domenie czystej spekulacji podpartej dość swobodną obserwacją praktyk matematycznych. Przykładowo, ujęcie nieskończoności matematycznej poprzez odwołanie się do struktury aspektowej systemu pojęciowego nie było nigdy dotąd

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych
za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72).
Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

badane empirycznie, co jest o tyle istotne, że chodzi o jedną z najśmielszych tez zawartych w WMCF.

Idee Lakoffa i Núñeza na temat nieskończoności są problematyczne również z teoretycznego punktu widzenia. Jak zauważa Pogonowski (2011, 2012, 2017), wątpliwe jest, aby wszystkie rozważane w matematyce przypadki nieskończoności wyrastały z jednej metafory. W cytowanych pracach – do sięgnięcia po które zachęcam czytelników – Pogonowski wylicza wiele innych problemów kryjących się na kartach WMCF. Po pierwsze, dotyczą one adekwatności tez Lakoffa i Núñeza w świetle historii matematyki. Oto tylko jeden przykład. Metafora zbioru jako pojemnika oddaje potoczne intuicje na temat niewielkich zbiorów i zgodna jest z konceptualizacją Dedekinda, ale zawodzi, gdy bierzemy pod uwagę zbiory nieskończone, a właśnie takimi interesował się Georg Cantor, twórca teorii mnogości. Dla tego ostatniego zbiory były przepaściami. Oznacza to, że autorzy WMCF zaniedbują ważną rolę zjawiska alternatywnej konceptualizacji w historii matematyki. Sądzę, że zarzutów tych można by uniknąć, precyzyjnie definiując przedmiot badań. Z jednej strony, badania Lakoffa i Núñeza należą do nurtu kognitywistyki matematyki, która operuje na wyidealizowanym, tj. nieuwzględniającym perspektywy historycznej, ujęciu poznawczych podstaw zdolności matematycznych. Z drugiej strony, liczne odwołania do historii matematyki obecne na kartach WMCF pozwalają sądzić, że rozważania autorów dotyczą nie tylko współczesności, ale też przeszłych „wynalazków poznawczych". Po drugie, jak zauważa Pogonowski, Lakoff i Núñez nie proponują żadnego kognitywistycznego wglądu w problematykę dowodu matematycznego, przez co propozycja pretendująca do miana kompletnej teorii matematyki jest w rzeczywistości od niej daleka (por. Hohol, 2020, rozdz. 4; Hohol i Miłkowski, 2019). Po trzecie, ale mocno powiązane z poprzednim, Pogonowski zauważa, że pewne działy matematyki zostały w WMCF całkowicie, albo niemal całkowicie, pominięte. Przykładem jest choćby geometria euklidesowa, która odegrała ogromną rolę w rozwoju samej matematyki (jak pamiętamy, Euklides konceptualizował geometrycznie liczby), a dziś jest jednym z fundamentalnych aspektów szkolnej edukacji. Wreszcie Pogonowski – podobnie

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72). Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

jak inni polemiści (np. Voorhees, 2004) – zarzuca Lakoffowi i Núñezowi zbyt pochopne wyciąganie wniosków filozoficznych.

Zdaniem Pogonowskiego konsekwencją odrzucenia platonizmu, co czynią autorzy WMCF, powinno być odrzucenie istnienia intuicji matematycznej, co byłoby destrukcyjne w wyjaśnianiu kontekstu odkrycia matematycznego. Jednocześnie badacz ten wskazuje, że metafory mogą odgrywać pewną rolę w tym kontekście, ale go nie wyczerpują. Kolejna kwestia, na którą uwagę zwracają inni autorzy, to przejście od warstwy epistemologicznej do ontologii matematyki. Wywód Lakoffa i Núñeza można streścić następująco: nawet gdyby poza ucieleśnionym umysłem istniała jakaś „zewnętrzna" matematyka, nie można by jej poznać, więc należy uznać, że jedyną matematyką, jaka istnieje, jest matematyka ucieleśniona. O ile w warstwie epistemologicznej propozycja zawarta na kartach WMCF jest rzeczywiście antyplatońska, niedawno Winter i Yoshimi (2020) zwrócili uwagę na to, że tezy Lakoffa i Núñeza pozostawiają wciąż wybór między wszystkimi dostępnymi ontologicznymi poglądami na matematykę. Oznacza to, że w warstwie filozoficznej Lakoff i Núñez nadinterpretowują własne tezy z zakresu lingwistyki kognitywnej (zob. także: Heller, 2014; Poczobut, 2009).

Czy droga do abstrakcji wiedzie przez metafory?

Prócz omówionych wyżej zarzutów kierowanych do zastosowania teorii metafor kognitywnych do badań nad poznaniem matematycznym istnieje sporo wątpliwości wobec teorii metafor w ogóle. W niniejszym rozdziale określam (jak wielu innych autorów) propozycję Lakoffa i współpracowników mianem „teorii". Od teorii kognitywistycznych, jak i innych teorii naukowych, oczekiwać możemy *wyjaśniania* oraz *przewidywania* zjawisk (tu genezy pojęć abstrakcyjnych). W kognitywistyce przyjmuje się najczęściej, że wyjaśnianie polega na opisie mechanizmu, który dzięki odpowiedniej organizacji części i wykonywanych operacji odpowiada przyczynowo za dane zjawisko (zob. np. Miłkowski, 2014b; Miłkowski, Hohol, Nowakowski, 2019). Choć Miłkow-

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72). Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

ski (2014a) zauważa, że mechanistyczna parafraza teorii metafor kognitywnych jest możliwa:

> analizy Lakoffa nie zawierają wszystkich szczegółów niezbędnych do pełnego wyjaśnienia przyczynowego, które jest wymagane przez mechanicyzm; pozostaje głównie na poziomie analizy lingwistycznej (często popieranej jedynie świadectwami anegdotycznymi, a nie rzetelną analizą korpusową), pomijając mechanizmy psychologiczne i neuronalne (s. 265).

Innymi słowy, w sensie mechanistycznym teoria metafor to w najlepszym razie szkic wyjaśnienia, a nie pełne wyjaśnienie przetwarzania pojęć abstrakcyjnych przez umysł.

Przejdźmy teraz do predykcji, jakich dostarcza teoria metafor. Metafory gruntujące mają być – jak sama nazwa wskazuje – ugruntowane bezpośrednio w percepcji i działaniu. Można zatem przewidywać, że podczas poznawczego przetwarzania znaczenia zdań, obejmujących pojęcia abstrakcyjne, zwiększoną aktywność wykazywać będą struktury sensoryczno-motoryczne mózgu. Badania przeprowadzone z wykorzystaniem metod neuroobrazowania pokazują jednak, że nie zawsze tak jest, a nawet kiedy rzeczywiście obserwuje się zwiększenie aktywacji obszarów percepcyjnych i motorycznych, to nie zawsze można okreslić przyczynowy związek z przetwarzaniem pojęć (np. Chatterjee, 2010; Ostarek, Huettig, 2019). Co więcej, badania wskazują na zależność od kontekstu – to samo pojęcie może być przetwarzane w mniej lub bardziej ugruntowany sposób (zob. Dove, 2016). Wniosek ten jest spójny z wynikami omówionych wyżej badań behawioralnych nad efektem SNARC (Cipora, He, Nuerk, 2020; Cipora, Hohol *et al.*, 2016; Hohol, Willmes *et al.*, 2020) – w pewnych warunkach przetwarzanie liczb może być bardziej osadzone w reprezentacjach przestrzennych, a w innych mniej bądź wcale. Może być również tak, że ucieleśnienie odgrywa ważną rolę na wczesnych etapach ontogenezy systemu pojęciowego, zaś później staje się wręcz przeszkodą, która musi zostać przekroczona w dalszym rozwoju poznawczym, tak aby jednostka mogła dysponować abstrakcyjnymi strukturami wiedzy.

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72). Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

To jednak nie koniec problemów. Z badań rozwojowych wiadomo, że dzieci zaczynają rozumieć metafory stosunkowo późno, w wieku około 8–11 lat (Reynolds, Ortony, 1980), co jest późniejsze niż rozumienie pewnych pojęć abstrakcyjnych, także z zakresu poznania matematycznego. Trudno wyobrazić sobie zatem, aby metafora była podstawowym, w sensie ontogenetycznym, mechanizmem rozumienia abstrakcji. Co więcej, nie zawsze jest tak, że znaczenie pojęcia konkretnego w przykładach dostarczanych przez Lakoffa i Johnsona (1980/2010) jest łatwiej uchwytne od znaczenia pojęcia abstrakcyjnego. Jest tak np. w przypadku metafory Argumentowanie To Wojna. Jak zauważa Dove (2011), obydwie jej dziedziny są równie skomplikowane poznawczo. Nie jest tak, że aby zrozumieć, czym jest racjonalna argumentacja, trzeba wiedzieć najpierw, na czym polega konflikt fizyczny, obejmujący np. wymianę ciosów i bronienie się przed nimi. Jest raczej tak, że aby zrozumieć wywód Lakoffa i Johnsona, trzeba najpierw rozumieć obydwa pojęcia.

Na koniec jeszcze jeden zarzut, który będzie jednocześnie dobrym wprowadzeniem do alternatywnego ujęcia ucieleśnienia pojęć abstrakcyjnych. Choć teoria metafor wywodzi się z lingwistyki kognitywnej, a więc badań nad językiem, zdaje się ona nie doceniać roli języka w kształtowaniu struktury umysłu. Jak pamiętamy, dla Lakoffa i Johnsona (1980/2010) język jest bowiem jedynie zwierciadłem, w którym odbijają się nieświadome procesy poznawcze. Wielu badaczy zgadza się dziś natomiast z tezą Wygotskiego (1934/1989), rozwijaną później m.in. przez Dennetta (1996/1997), którą celnie – i nomen omen metaforycznie – podsumował LeDoux (2015/2017): „język [naturalny, M.H.] stanowi ścieżkę, po której podróżować mogą nasze myśli" (s. 273). W literaturze funkcjonuje również inna metafora: język nie jest *zwierciadłem* naszych myśli; stanowi on raczej *rusztowanie* dla nowych form poznania (np. Clark, 2008). Nie oznacza to jednak powrotu do oryginalnej koncepcji języka myśleńskiego Fodora, od której rozpocząłem niniejszy rozdział, ani całkowitego odrzucenia tezy o ucieleśnieniu umysłu.

Do grupy badaczy wskazujących na kluczową rolę systemu językowego oraz doświadczeń językowych w myśleniu abstrakcyj-

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych
za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72).
Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

nym należą twórcy teorii, takich jak: teoria języka i usytuowanych symulacji (language and situated simulations, LASS; Barsalou, Santos, Simmons, Wilson, 2008), teoria słów jako narzędzi społecznych (word as social tools, WAT; Borghi, Binkofski, 2014), teoria ucieleśnionej kombinacji pojęciowej (embodied conceptual combination, ECCo; Lynott, Connell, 2010), teoria współzależności symboli (symbol interdependency, SI; Louwerse, 2018) i wreszcie teoria języka jako ucieleśnionego wzmocnienia wydajności mózgu i rusztowania poznawczego (language as embodied neuroenhancement and scaffold theory, LENS; Dove, 2020). Jeśli chodzi o poszczególne komponenty i procesy, które konstytuują mechanizmy abstrakcyjnego myślenia, teorie te różnią się w szczegółach, a ich omawianie przekracza zakres niniejszej pracy (zob. Pecher, Boot, Dantzig, 2011; Dove, 2020). W ogólniejszej perspektywie z wymienionych teorii wyłania się jednak dość spójny obraz. Teoria metafor Lakoffa i współpracowników jest ucieleśnioną teorią pojęć w sensie mocnym, tj. zakłada, że system sensoryczno-motoryczny stanowi zarówno podstawowy nośnik, jak i całkowicie określa znaczenie pojęć. Z kolei LASS, WAT, ECCo, SI oraz LENS zakładają, że system sensoryczno-motoryczny odgrywa ważną rolę jako nośnik pojęć, ale ich treść może wykraczać poza nasze bezpośrednie doświadczenia i być przynajmniej współtworzona przez język. Jest to więc wciąż ucieleśnienie, ale w sensie słabszym niż w teorii metafor kognitywnych.

Punktem wyjścia tych ucieleśnionych teorii pojęć abstrakcyjnych (w słabym sensie) jest model podwójnego kodowania Paivio (1986), który zakłada, że system pojęciowy człowieka obejmuje dwa formaty reprezentacyjne – wyobrażeniowy oraz językowy. Pierwszy z tych formatów nadaje się do kodowania tylko pojęć konkretnych, zaś drugi – zarówno pojęć konkretnych, jak i abstrakcyjnych. Tym, co w „wyobrażeniowej" części modelu Paivio modyfikują teorie ucieleśnienia (w sensie słabym), jest jest opis mechanizmu. Oryginalna propozycja Paivio odnosi się do tzw. obrazów umysłowych (por. przyp. 2 w nieniejszej pracy), zaś nowsze teorie mówią o reaktywacjach stanów sensoryczno-motorycznych, towarzyszących przyswajaniu danego pojęcia. Jeśli zaś chodzi o drugi z formatów, teorie ucieleśnienia (w sensie

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72). Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

słabym) wskazują, że język naturalny nadaje się do przetwarzania pojęć abstrakcyjnych ze względu na własności obliczeniowe i społeczne.

Jeśli chodzi o własności obliczeniowe języków naturalnych, Dove (2011, 2020) zauważa, że są one bardzo podobne do tych postulowanych przez Fodora dla „języka myśleńskiego", z tym że język naturalny nie jest wrodzony, ale przyswajany w dość długim procesie rozwojowym. Powiązania między słowami i morfemami są arbitralne (słowo kot nie przypomina kota), język jest niezależny od bodźców, dzięki czemu może być wykorzystywany kreatywnie, zaś gramatyka języka umożliwia planowanie złożonych działań i inspekcję ich rezultatów bez konieczności rzeczywistego wykonania tych działań (zob. Rolls, 2008). Gramatyka promuje tworzenie nowych zdań na podstawie tych skonstruowanych już wcześniej, w wyniku czego powstawać mogą zupełnie nieoczekiwane kombinacje. Gdy rezultaty zostają upublicznione (w formie ustnej lub pisemnej), do gry wkraczają społeczne własności języka, na co szczególną rolę zwracają Borghi i Binkofski (2014). Język jest dostępnym publicznie narzędziem, umożliwiającym zachowywanie treści myśli (np. na kartce), kolektywne manipulowanie nimi czy też zmianę znaczenia istniejących już symboli przy jednoczesnym zachowaniu intersubiektywności.

Ponieważ obydwa formaty reprezentacyjne – wyobrażeniowy oraz językowy – nie są od siebie całkowicie odizolowane (pojęcie „kot "agreguje zarówno bezpośrednie doświadczenia sensoryczno -motoryczne, jak i językową wiedzę, np. o systematyce biologicznej), opisywane tu podejście nie napotyka na problem ugruntowania symboli. Jednocześnie wyżej wymienione, obliczeniowe i społeczne własności języka sprawiają, że znaczenie pojęć kształtowane może być w sposób elastyczny i wykraczający poza bezpośrednie doświadczenia jednostki. Społeczne użycie języka skutkować może również formułowaniem metafor, które na zasadzie sprzężenia zwrotnego mogą prowadzić do formułowania kolejnych, jeszcze bardziej abstrakcyjnych myśli, w tym także w dziedzinie matematyki (zob. Winter, Yoshimi, 2020). Innymi słowy, użycie metafor wiąże się z abstrakcyjnym myśleniem, ale w innym sensie niż twierdzą Lakoff i współpracownicy.

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych
za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72).
Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

Podsumowanie

W niniejszym rozdziale podsumowałem koncepcję metafor poznawczych oraz jej aplikację do poznania matematycznego, zarówno w sensie teoretycznym, jak i metateoretycznym. Następnie wskazałem na słabe punkty tych projektów i – by nie pozostawiać czytelników tylko z negatywnymi konkluzjami – krótko zarysowałem alternatywne ujęcie pojęć abstrakcyjnych. Wydaje się, że metafora w sensie Lakoffa i in. nie jest mechanizmem fundamentalnym (czy też konstytutywnym) dla tworzenia i rozumienia pojęć abstrakcyjnych. Nie oznacza to, że powstałe dzięki naszej kompetencji językowej metafory nie mogą wspierać na różne sposoby procesów poznania, w tym matematycznego, np. poprzez objaśnianie nowego materiału za pomocą dobrze znanych z życia codziennego przykładów. Wiele wskazuje jednak na to, że metafory nie są wcześniejsze niż język, jak twierdzą Lakoff i Núñez. Korzystając z przytaczanej już metafory, to język stanowi poznawcze „rusztowanie" dla myślenia abstrakcyjnego, niekiedy obejmującego również metafory. Opisane przeze mnie podejście, które określiłem jako ucieleśnienie pojęć abstrakcyjnych w sensie słabym, jest konkurencyjne zarówno wobec propozycji języka myśleńskiego Fodora, jak i metafor kognitywnych Lakoffa, ale zdaje się zachowywać najlepsze elementy każdego z nich.

Bibliografia

Anderson, M.L. (2003). Embodied Cognition. A Field Guide. *Artificial Intelligence*, *149*(1), s. 91–130.

Barsalou, L.W. (2020). Challenges and Opportunities for Grounding Cognition. *Journal of Cognition*, *3*(1), s. 1–24.

Barsalou, L.W. (2008). Grounding Symbolic Operations in the Brain's Modal Systems. W: G. R. Semin, E.R. Smith (red.). *Embodied Grounding: Social, Cognitive, Affective, and Neuroscientific Approaches* (s. 9–42). Cambridge: Cambridge University Press.

Barsalou, L.W. (1999). Perceptual Symbol Systems. *Behavioral and Brain Sciences*, *22*(4), s. 577–660.

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72). Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

Barsalou, L.W., Santos, A., Simmons, K.W., Wilson, C.D. (2008). Language and Simulations in Conceptual Processing. W: M. De Vega, A.M. Glenberg, A.C. Graesser (red.). *Symbols, Embodiment and Meaning* (s. 245–283). Oxford: Oxford University Press.

Bechtel, W., Abrahamsen, A., Graham, G. (1998). The Life of Cognitive Science. W: W. Bechtel, G. Graham (red.). *A Companion to Cognitive Science* (s. 2–104). Malden: Blackwell Publishers.

Borghi, A.M., Binkofski, F. (2014). *Words as Social Tools. An Embodied View on Abstract Concepts*. New York: Springer.

Boroditsky, L. (2001). Does Language Shape Thought? Mandarin and English Speakers' Conceptions of Time. *Cognitive Psychology, 43*(1), s. 1–22.

Brożek, B. (2020). *The Legal Mind. A New Introduction to Legal Epistemology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Brożek, B., Hohol, M. (2014). *Umysł matematyczny*. Kraków: Copernicus Center Press.

Burton, L. (1995). Moving Towards a Feminist Epistemology of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 28*(3), s. 275–291.

Chatterjee, A. (2010). Disembodying Cognition. *Language and Cognition, 2*(1), s. 79–116.

Cipora, K., He, Y., Nuerk, H.-C. (2020). The Spatial Numerical Association of Response Codes Effect and Math Skills: Why Related? *Annals of the New York Academy of Sciences, 1477*(1), s. 5–19.

Cipora, K., Hohol, M., Nuerk, H.-C., Willmes, K., Brożek, B., Kucharzyk, B., Nęcka, E. (2016). Professional Mathematicians Differ From Controls in Their Spatial-Numerical Associations. *Psychological Research, 80*(4), s. 710–726.

Cipora, K., Szczygieł, M., Hohol, M. (2014). Palce, które liczą. Znaczenie liczenia na palcach dla poznania matematycznego u człowieka dorosłego. *Psychologia – Etologia – Genetyka, 30*, s. 59–73.

Clark, A. (2008). *Supersizing the Mind*. Oxford: Oxford University Press.

Dehaene, S., Bossini, S., Giraux, P. (1993). The Mental Representation of Parity and Number Magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General, 122*(3), s. 371–396.

Dennett, D.C. (1997). *Natura umysłów*. Warszawa: Wydawnictwo CiS.

Dove, G. (2011). On the Need for Embodied and Dis-embodied Cognition. *Frontiers in Psychology, 1*(242). DOI: 10.3389/fpsyg.2010.00242.

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72). Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

Dove, G. (2016). Three Symbol Ungrounding Problems. Abstract Concepts and the Future of Embodied Cognition. *Psychonomic Bulletin & Review, 23*, s. 1109–1121.

Dove, G. (2020). More than a Scaffold. Language is a Neuroenhancement. *Cognitive Neuropsychology, 37*(5–6), s. 288–311.

Fischer, M.H. (2012). A Hierarchical View of Grounded, Embodied, and Situated Numerical Cognition. *Cognitive Processing, 13*(S1), s. 161–164.

Fodor, J.A. (1975). *The Language of Thought*. Cambridge: Harvard University Press.

Fodor, J.A. (1992). *A Theory of Content and Other Essays*. Cambridge: Bradford Books.

Gibbs, R.W., Colston, H.L. (1995). Image Schema. Cognitive Psychological Reality of Image Schemas and Their Transformation. *Cognitive Linguistics, 6*(4), s. 347–378.

Goldin, G.A. (2001). Counting on the Metaphorical. *Nature, 413*(6851), s. 18–19.

Harnad, S. (1990). The Symbol Grounding Problem. *Physica D: Nonlinear Phenomena, 42*(1–3), s. 335–346.

Heller, M. (2014). Matematyczność świata i matematyczność mózgu. *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce, 54*, s. 287–294.

Heller, M. (2006). Czy świat jest matematyczny? W: *Filozofia i Wszechświat* (s. 48–57). Kraków: Universitas.

Hetmański, M. (2020). Visual Metaphor and Its Narrative Function Jacek Malczewski's Parabolic Painting. *Cognitive Linguistic Studies, 7*(1), s. 141–167.

Hetmański, M. (2015). Metaphoric Confinement of Information. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric, 40*(1), s. 161–178.

Hohol, M. (2020). *Foundations of Geometric Cognition*. London–New York: Routledge.

Hohol, M., Miłkowski, M. (2019). Cognitive Artifacts for Geometric Reasoning. *Foundations of Science, 24*(4), s. 657–680

Hohol, M., Willmes, K., Nęcka, E., Brożek, B., Nuerk, H.-C., Cipora, K. (2020). Professional Mathematicians Do Not Differ from Others in the Symbolic Numerical Distance and Size Effects. *Scientific Reports, 10*(11531). DOI: 10.1038/s41598-020-68202-z.

Hohol, M., Wołoszyn, K., Nuerk, H.-C., Cipora, K. (2018). A Large-Scale Survey on Finger Counting Routines, Their Temporal Sta-

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72). Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

bility and Flexibility in Educated Adults. *PeerJ, 6*(e5878). DOI: 10.7717/peerj.5878.

Jakubiec, M. (2017). Metafory, prawo i artefakty, czyli kilka uwag na temat pojęć prawnych z perspektywy kognitywnej. *Archiwum Filozofii Prawa i Filozofii Społecznej, 14*(1), s. 52–65.

Johnson, M. (2015). *Znaczenie ciała: Estetyka ludzkiego rozumienia*. Łódź: *Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego*.

Kosslyn, S. (1980). *Image and Mind*. Cambridge: Harvard University Press.

Lakoff, G. (2011). *Kobiety, ogień i rzeczy nibezpieczne*. Kraków: Universitas.

Lakoff, G., Johnson, M. (1999). *Philosophy in the Flesh.The Embodied Mind and Its Challenge to Western Thought*. New York: Basic Books.

Lakoff, G., Johnson, M. (2010). *Metafory w naszym życiu*. Warszawa: Aletheia.

Lakoff, G., Núñez, R. (1997). Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-Based Mathematics. W: L.D. English (red.). *Mathematical Reasoning. Analogies, Metaphors, and Images* (s. 21–89). Hillsdale: Routledge.

Lakoff, G., Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From*. New York: Basic Books.

Lynott, D., Connell, L. (2010). Embodied Conceptual Combination. *Frontiers in Psychology, 1*(212).

LeDoux, J. (2017). *Lęk. Neuronauka na tropie źródeł strachu i lęku*. Kraków: Copernicus Center Press.

Louwerse, M. (2018). Knowing the Meaning of a Word by the Linguistic and Perceptual Company That It Keeps. *Topics in Cognitive Science, 10*, s. 573–589.

MacLane, S. (1986). *Mathematics, Form and Function*. New York: Springer-Verlag.

Marghetis, T., Núñez, R. (2013). The Motion Behind the Symbol. A Vital Role for Dynamism in the Conceptualization of Limits and Continuity in Expert Mathematics. *Topics in Cognitive Science, 5*(2), s. 299–316.

Marghetis, T., Núñez, R., Bergen, B.K. (2014). Doing Arithmetic by Hand. Hand Movements During Exact Arithmetic Reveal Systematic, Dynamic Spatial Processing. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 67*(8), s. 1579–1596.

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72). Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

Miłkowski, M. (2014a). Mechanizmy reprezentacyjne i abstrakcje. *Przegląd Filozoficzno-Literacki, 2*(39), s. 249–268.

Miłkowski, M. (2014b). Wyjaśnianie w kognitywistyce. *Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria, 2*(86), s. 151–166.

Miłkowski, M., Hohol, M., Nowakowski, P. (2019). Mechanisms in Psychology. The Road Towards Unity? *Theory & Psychology, 29*(5), s. 567–578.

Murphy, G. (1997). Reasons to Doubt the Present Evidence for Metaphoric Representation. *Cognition, 62*(1), s. 99–108.

Núñez, R., Lakoff, G. (1998). What Did Weierstrass Really Define? The Cognitive Structure of Natural and ∊-δ Continuity. *Mathematical Cognition, 4*(2), s. 85–101.

Ostarek, M., Huettig, F. (2019). Six Challenges for Embodiment Research. *Current Directions in Psychological Science, 28*(6), s. 593–599.

Paivio, A. (1986). *Mental Representations. A Dual Coding Approach*. Oxford: Oxford University Press.

Pecher, D., Boot, I., van Dantzig, S. (2011). Abstract Concepts: Sensory Motor Grounding, Metaphors, and Beyond. W: B. Ross (red.). *The Psychology of Learning and Motivation* (s. 217–248). Burlington: Academic Press.

Poczobut, R. (2009). Umysł matematyczny. Czy kognitywista może być matematycznym realistą? W: M. Urbański, P. Przybysz (red.). *Funkcje umysłu – Poznańskie Studia z Filozofii Humanistyki, 8*(21) (s. 331–356). Poznań: Zysk i S-ka.

Pogonowski, J. (2017). On Conceptual Metaphors in Mathematics. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia, 9*, s. 85–98.

Pognowski, J. (2012). Matematyczne metafory kognitywistów. Wykład konferencyjny: *LVIII Konferencja Historii Logiki*, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 23–24 października 2012. Pobrane z: http://logic.amu.edu.pl/images/0/0e/Mmk2012.pdf (dostęp: 3.02.2021).

Pogonowski, J. (2011). Geneza matematyki wedle kognitywistów. *Investigationes Linguisticae, 23*, s. 106–147.

Restle, F. (1970). Speed of Adding and Comparing Numbers. *Journal of Experimental Psychology, 83*(2p1), s. 274–278.

Reynolds, R.E., Ortony, A. (1980). Some Issues in the Measurement of Children's Comprehension of Metaphorical Language. *Child Development, 51*(4), s. 1110–1119.

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72). Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72

Rolls, E.T. (2008). Emotion, Higher-Order Syntactic Thoughts, and Consciousness. W: L. Weiskrantz, D. Davies (red.). *Frontiers of Consciousness. Chichele Lectures* (s. 131–167). Oxford: Oxford University Press.

Schiralli, M., Sinclair, N. (2003). A Constructive Response to Where Mathematics Comes From. *Educational Studies in Mathematics*, 52, s. 79–91.

Slingerland, E. (2004). Conceptual Metaphor Theory as Methodology for Comparative Religion. *Journal of the American Academy of Religion*, *72*(1), s. 1–31.

Szczygieł, M., Cipora, K., Hohol, M. (2015). Liczenie na palcach w ontogenezie i jego znaczenie dla rozwoju kompetencji matematycznych. *Psychologia Rozwojowa*, *20*(2), s. 23–33.

Vogt, P. (2002). The Physical Symbol Grounding Problem. *Cognitive Systems Research*, *3*(3), s. 429–457.

Voorhees, B. (2004). Embodied Mathematics: Comments on Lakoff & Núñez. *Journal of Consciousness Studies*, *11*(9), 83–88.

Winkielman, P., Niedenthal, P.M. (2009). Ucieleśniony emocjonalny umysł społeczny. W: M. Kofta, M. Kossowska (red.). *Psychologia poznania społecznego. Nowe idee* (s. 83–101). Warszawa: PWN.

Winter, B.,Yoshimi, J. (2020). Metaphor and the Philosophical Implications of Embodied Mathematics. *Frontiers in Psychology*, *11*(569487). DOI: 10.3389/fpsyg.2020.569487.

Wygotski, L. (1989). *Myślenie i mowa*. Warszawa: PIW.

Zeki, S., Romaya, J.P., Benincasa, D.M.T., Atiyah, M.F. (2014). The Experience of Mathematical Beauty and Its Neural Correlates. *Frontiers in Human Neuroscience*, *8*(68).

Hohol, M. (2021). Matematyka w metaforach? O wyjaśnianiu pojęć matematycznych za pomocą metafor kognitywnych. W: M. Hetmański, A. Zykubek (red.), *Metafory ucieleśnione* (s. 49–72). Lublin: Wydawnictwo Academicon. https://doi.org/10.52097/acapress.9788362475810.49-72